23-03-16

• Απλή Στατιστική Συμπερασματολογία: Συμπερασματολογία για τη μέση τιμή

Γενικά: Έστω $x_1, ..., x_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό (μ, σ^2). Θέλαμε να εκτιμήσουμε το μ και να ελέγξουμε υποθέσεις γύρω από την άγνωστη τιμή του

Έστω $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, οι γνωστές δειγματικές ποσότητες

Διακρίναμε τις περιπτώσεις:

① Κανονικός πληθυσμός, γνωστή διακύμανση $N(\mu, \sigma^2$: γνωστό$)$

Ο καλύτερος εκτιμητής του μ είναι: $\hat{\mu} = \bar{x}$ και το "καλύτερο" $(1-\alpha)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το μ:

$$L = \bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad U = \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Αυτό γιατί: $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Για να ελέγξουμε υποθέσεις για το μ που είναι:

i) $H_0: \mu \leq \mu_0$ v $H_a: \mu > \mu_0$ $\{\mu_0$: γνωστό$\}$

ii) $H_0: \mu \geq \mu_0$ v $H_a: \mu < \mu_0$

iii) $H_0: \mu = \mu_0$ v $H_a: \mu \neq \mu_0$

Χρησιμοποιούμε το στατιστικό $Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ όταν H_0: αληθής και για το επίπεδο σημαντικότητας του α οι κρίσιμες περιοχές είναι:

- i) $C = [Z_a, \infty)$ ή $Z \geq Z_\alpha$
ii) $C = (-\infty, -Z_\alpha]$ ή $Z \leq -Z_\alpha$
iii) $C = (-\infty, -Z_{\alpha/2}] \cup [Z_{\alpha/2}, \infty)$ ή $|Z| \geq Z_{\alpha/2}$

} Z-τεστ

(2) Γενικότερη περίπτωση: Κανονικός Πληθυσμός, Άγνωστη Διακύμανση
$N(\mu, \sigma^2$: άγνωστο$)$ || t-τεστ

Ο καλύτερος εκτιμητής του μ είναι: $\hat{\mu} = \bar{x}$ και το καλύτερο $(1-\alpha)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για το μ:

$$L = \bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad , \quad U = \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Αυτό γιατί $\dfrac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

Για να ελέγξουμε υποθέσεις για το μ χρησιμοποιούμε το στατιστικό:
$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, όταν H_0: αληθής και για το επίπεδο σημαντικότητας του α οι κρίσιμες περιοχές θα είναι:

i) $C = [t_{\alpha, n-1}, \infty)$ ή $t \geq t_{\alpha, n-1}$

ii) $C = (-\infty, -t_{\alpha, n-1}]$ ή $t \leq -t_{\alpha, n-1}$

iii) $C = (-\infty, t_{\alpha/2, n-1}] \cup [t_{\alpha/2, n-1}, \infty)$ ή $|t| \geq t_{\alpha/2, n-1}$

Παράδειγμα: 72, 69, 82, 75, 103, 121, 114, 100, 85, 99
$n=10$, δείκτης νοημοσύνης > 88
$N(\mu, \sigma^2=49)$

⇝ Απλή Στατιστική Συμπερασματολογία –
Συμπερασματολογία για τη μέση τιμή

• Τα παρακάτω δεδομένα αναφέρονται στο δείκτη νοημοσύνης 10 παιδιών και ο πληθυσμός έχει κανονική κατανομή με $s^2=49$, $\alpha=0{,}05$
Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι ο δείκτης νοημοσύνης είναι 88 έναντι του ότι είναι μεγαλύτερος του 88.

$H_0: \mu=88$, $H_\alpha: \mu>88$

$Z = \dfrac{\bar{x}-\mu(=88)}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ | $\hat{\mu}=\bar{x}$, $\bar{x}\sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ | Κρίσιμη περιοχή είναι $Z \geq Z_\alpha (= Z_{0,05} = 1{,}645)$

H_0: αληθής $\quad \bar{x}=92 \rightsquigarrow Z = \dfrac{92-88}{\frac{7}{\sqrt{10}}} = 1{,}81$

Επειδή είναι $1{,}81 > 1{,}645$, απορρίπτω την H_0
Δηλαδή, $\mu>88$

P-τιμή $= P(Z>1{,}81) = 0{,}0351 < 0{,}05$, άρα απορρίπτεται η H_0. 7,10